

CHỦ ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Ngọc Quỳnh sưu tầm và biên soạn

PHƯƠNG PHÁP 1. NÂNG LÊN LŨY THỪA

I. Một số dạng phương trình cơ bản.

- Dạng 1. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
- Dạng 2. $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
- Dạng 3. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$
- Dạng 4. $\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^3$
- Dạng 5. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$

Phương pháp chung

+ Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình bằng việc giải hệ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$

+ Bước 2. Bình phương hai vế của phương trình và đưa phương trình về dạng $\sqrt{F(x)} = G(x)$.

+ Bước 3. Giải phương trình cơ bản $\sqrt{F(x)} = G(x)$ và kiểm tra sự thỏa mãn của nghiệm tìm được với điều kiện xác định của phương trình để kết luận.

- Dạng 6. $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$

Phương pháp chung

+ Bước 1. Lũy thừa bậc ba hai vế của phương trình thì được

$$f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x) \cdot g(x)} \left(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} \right) = h(x)$$

+ Bước 2. Biến đổi phương trình và chú ý đến $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$ ta được

$$3\sqrt[3]{f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)} = h(x) - f(x) - g(x)$$

+ Bước 3. Tiếp tục lũy thừa bậc ba hai vế về thì được phương trình

$$27.f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = [h(x) - f(x) - g(x)]^3$$

- Dạng 7. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{r(x)}$. Trong đó xây ra một trong các trường hợp sau:

$$+\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = \sqrt{h(x) \cdot r(x)}$$

$$+\sqrt{f(x) \cdot u(x)} = \sqrt{g(x) \cdot r(x)}$$

$$+f(x) + g(x) = h(x) + r(x)$$

Phương pháp chung

+ Nếu có $\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = \sqrt{h(x) \cdot r(x)}$ thì sử dụng phép biến đổi tương đương

$$\left[\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \right]^2 = \left[\sqrt{h(x)} + \sqrt{r(x)} \right]^2$$

+ Nếu có $\sqrt{f(x) \cdot u(x)} = \sqrt{g(x) \cdot r(x)}$ thì sử dụng phép biến đổi hệ quả

$$\left[\sqrt{f(x)} - \sqrt{u(x)} \right]^2 = \left[\sqrt{g(x)} - \sqrt{r(x)} \right]^2$$

+ Nếu có $f(x) + g(x) = h(x) + r(x)$ thì sử dụng phép biến đổi tương đương

$$\left[\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \right]^2 = \left[\sqrt{h(x)} + \sqrt{r(x)} \right]^2$$

II. Một số bài tập minh họa

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 69x + 27} = \sqrt{x^2 + 96x + 2}$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{x^3 - x^2 + 3} = \sqrt{3x + 1}$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x(x-1)^2} = \sqrt{x^2 + 7x}$.

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} = 3x+1$

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{x-1} = 5 - 2\sqrt{3x-2}$.

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} = x-1$

Bài 7. Giải phương trình $2\sqrt{x^2 + 2x + 6} = x + 5$

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1} = x + 1$

Bài 9. Giải phương trình $2x - \sqrt{x^2 + 4x + 1} = 3$

Bài 10. Giải phương trình $\frac{\sqrt{2x-1}+2}{4x-1} = 1$

Bài 11. Giải phương trình $4\sqrt{2x-1} = x^2 - 4x - 2$

Bài 12. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 3$.

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$

Bài 14. Giải phương trình $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$

Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{4x-3}$

Bài 16. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{4x+1}$

Bài 17. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x-4} + \sqrt{4x-3}$

Bài 18. Giải phương trình $\sqrt{3-x} - 2\sqrt{x} = \sqrt{7x-1} - 2\sqrt{1-x}$

Bài 19. Giải phương trình $\sqrt{4x+3} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+2}$.

Bài 20. Giải phương trình $\sqrt{\frac{1-x^3}{3-x}} - \sqrt{1-x} = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{3-x}$.

Bài 21. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-x-6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x-2} - \sqrt{2x+3}$.

Bài 22. Giải phương trình $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

Bài 23. Giải phương trình $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

Bài 24. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$.

Bài 25. Giải phương trình sau $\sqrt{x^2+5x} + \sqrt{x^3+2x+1} = x+1$.

Bài 26. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1} = x+1$

Bài 27. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Bài 28. Giải phương trình $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-1} = 1$

Bài 29. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{4x+2} = 0$

Bài 30. Giải phương trình $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2$

Bài 31. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+1} = \sqrt[3]{3x^2-x-2} - \sqrt[3]{2x^2-x-3}$.

PHƯƠNG PHÁP 2. PHÂN TÍCH PHƯƠNG TRÌNH THÀNH TÍCH

I. Cơ sở của phương pháp

Để phân tích một phương trình thành tích ta thường sử dụng các kỹ thuật

- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Sử dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.
- Sử dụng công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

II. Một số kỹ năng phân tích phương trình thành tích

1. Kỹ năng sử dụng các hằng đẳng thức.

Bài 32. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2} + \frac{1}{x} = \frac{13-7x}{2}$.

Bài 33. Giải phương trình $x^2+3x = \sqrt{1-x} + \frac{1}{4}$

Bài 34. Giải phương trình $(x+3)\sqrt{48-x^2-8x} = x+12$.

Bài 35. Giải phương trình $\sqrt{-x^2-8x+48} = \frac{28-x}{x+3}$.

Bài 36. Giải phương trình $3x^2 + 2(x-1)\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 5x + 2$.

Bài 37. Giải phương trình $4x^2 + (8x-4)\sqrt{x-1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x - 3}$.

Bài 38. Giải phương trình $\frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} + x^2 - 16 = 0$.

Bài 39. Giải phương trình $\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Bài 40. Giải phương trình $2 + 3\sqrt[3]{9x^2(x+2)} = 2x + 3\sqrt[3]{3x(x+2)^2}$.

Bài 41. Giải phương trình $x^3 - 3x^2 - (x+1)\sqrt{x+2} + 6x = 4\sqrt{x+2} - 6$

Bài 42. Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + (1-3x)\sqrt{3x-2} - 3\sqrt{3x-2} + 63x - 32 = 0$.

Bài 43. Giải phương trình $x^2 - 6x + 29 + 2\sqrt{3x^2 + 10x + 3} = (10-2x)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})$.

Bài 44. Giải phương trình $(5x+8)\sqrt{2x-1} + 7x\sqrt{x+3} = 9x + 18 - (x-26)\sqrt{x-1}$.

2. Kỹ thuật sử dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

Bài 45. Giải phương trình $(x+3)\sqrt{2x+5} + 9 = x^2$

Bài 46. Giải phương trình $4x^3 - 14x^2 + 4x + 1 = (2x-1)\sqrt{4x+5}$.

Bài 47. Giải phương trình $2x^3 - 9x^2 + 8x + 3 = (2x^2 - 3x - 1)\sqrt{2x-1}$.

Bài 48. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + x + \sqrt{2x^2 - 2} = (x^2 + x)\sqrt{2x^2 - 2} + 2$

Bài 49. Giải phương trình $2\sqrt{x^2 - 9} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$

Bài 50. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x^2 - x - 2} + 1$.

Bài 51. Giải phương trình $x + 4\sqrt{7-x} = 4\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$

Bài 52. Giải phương trình $x^3 + 7x^2 + 3x = 5(x^2 + x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 3$

Bài 53. Giải phương trình $(x + \sqrt{x} + 1)\sqrt{x-2} = x^2 + x + 1$.

Bài 54. Giải phương trình $\sqrt{2x^3 + 7x^2 - 17x + 3} - \sqrt{2x-3} + 1 = \sqrt{x^2 + 5x - 1}$.

3. Kỹ năng sử dụng công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

Bài 55. Giải phương trình $3x^2 + 3x + 2 = (x+6)\sqrt{5x^2 - 2x - 3}$

Bài 56. Giải phương trình $x^2 - 4x + (x-3)\sqrt{x^2 - x - 1} - 1 = 0$

Bài 57. Giải phương trình $4x^2 + \sqrt{2x+9} = 9$.

Bài 58. Giải phương trình $(x+1)(x+3)=5\sqrt{5x+11}$.

Bài 59. Giải phương trình $\sqrt{4x+9}+3(2x+1)=2x^2$.

Bài 60. Giải phương trình $4x^2+7x+1=2\sqrt{x+2}$.

Bài 61. Giải phương trình $x^2+5x-2=4\sqrt{x^3-8}$.

Bài 62. Giải phương trình $2x^2-5x+1=3\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}$

Bài 63. Giải phương trình $\sqrt{x^3+2x^2-7x+6}-\sqrt{x}+\sqrt{x^3+1}$.

PHƯƠNG PHÁP 3. SỬ DỤNG ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP

Cơ sở phương pháp: Nhiều phương trình vô tỉ có thể nhẩm được nghiệm $x=x_0$ hữu tỉ, khi đó phương trình luôn viết được thành $(x-x_0)P(x)=0$ và $P(x)=0$ có thể vô nghiệm hoặc giải được.

Cách nhẩm nghiệm: Ta thường thử các giá trị x_0 để trong căn là bình phương hoặc lập phương.

Một số phép biến đổi nhân lượng liên hợp

- Dạng 1. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$
- Dạng 2. $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=\frac{f(x)\pm g(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}\mp\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}}$
- Dạng 3. $\sqrt{f(x)}-a=\frac{f(x)-a^2}{\sqrt{f(x)}+a}$
- Dạng 4. $\sqrt[3]{f(x)}\pm a=\frac{f(x)\pm a^3}{\sqrt[3]{f^2(x)}\mp a\cdot\sqrt[3]{f(x)}+a^2}$
- Dạng 5. $\sqrt{f(x)}-g(x)=\frac{f(x)-g^2(x)}{\sqrt{f(x)}+g(x)}$
- Dạng 6. $\sqrt[3]{f(x)}\pm g(x)=\frac{f(x)\pm g^3(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}\mp\sqrt[3]{f(x)}\cdot g(x)+g^2(x)}$

Một số kinh nghiệm xử sử dụng phương pháp nhân đại lượng liên hợp

- Phương trình nhẩm được nghiệm hữu tỉ.
- Phương trình chứa nhiều căn thức cùng bậc.
- Phương trình chứa cả căn bậc hai và căn bậc ba.

1. Nhân thêm lượng liên hợp

Bài 65. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+2x=\sqrt{x-4}-5$.

Bài 66. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+x^2=\sqrt{2(x-1)}+1$.

Bài 67. Giải phương trình $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$.

Bài 68. Giải phương trình $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$.

Bài 69. Giải phương trình sau $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

Bài 70. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-1}+x+4=0$.

Bài 71. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+3x+1}+x^2=\sqrt[3]{5x+1}+2x$.

Bài 72. Giải phương trình $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$

Bài 73. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

Bài 74. Giải phương trình $x+\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x-1}=2+\sqrt{2}$.

Bài 75. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}-3\sqrt{6-5x}+16=0$

Bài 76. Giải phương trình $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$

Bài 77. Giải phương trình $\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-4+|x|+|x-1|$

2. Tách biểu thức thành tích các biểu thức liên hợp

Bài 78. Giải phương trình $2+\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=x$.

Bài 79. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Bài 80. Giải phương trình $x^2-10x+14=2\sqrt{2x+1}$

Bài 81. Giải phương trình $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}+2x+1=x^2$

Bài 82. Giải phương trình $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

3. Một số kỹ thuật xử lý sau nhân lượng liên hợp

Bài 83. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+10}$

Bài 84. Giải phương trình $2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}$.

Bài 85. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Bài 86. Giải phương trình $\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)=3x^2$

Bài 87. Giải phương trình: $\sqrt{x(x+2)}+\sqrt{x(x-1)}=2\sqrt{x^2}$

Bài 88. Giải phương trình: $\sqrt{8x+1}+\sqrt{46-10x}=-x^3+5x^2+4x+1$.

Bài 89. Giải phương trình $4\left(2\sqrt{10-2x}-\sqrt[3]{9x-37}\right)=4x^2-15x-33$.

Bài 90. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$.

Bài 91. Giải phương trình $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$.

Bài 92. Giải phương trình $\sqrt[3]{162x^3 + 2} - \sqrt{27x^2 - 9x + 1} = 1$.

Bài 93. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

PHƯƠNG PHÁP 4. ĐẶT ẨN PHỤ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. Đặt một ẩn phụ đưa phương trình về dạng phương trình một ẩn

Bài 94. Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{x^2 - x - 2} = 2x + 7$.

Bài 95. Giải phương trình $2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x+2}{x+1}$.

Bài 96. Giải phương trình $x^2 - 4x\sqrt{2x-1} + 6x - 3 = 0$.

Bài 97. Giải phương trình $3(x^2 - 1) + 4x = 4x\sqrt{4x-3}$.

Bài 98. Giải phương trình $3x^2 + 2x + 7 = 3(x+1)\sqrt{x^2 + 3}$.

Bài 99. Giải phương trình $x^2 - 3x + 4 = 3\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.

Bài 100. Giải phương trình $2x^2 + 13x = 36 + 7\sqrt{x^3 - 24x + 32}$

Bài 101. Giải phương trình $\frac{3-x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2(x^2-3x+4)}} = 1$.

Bài 102. Giải phương trình $x-1+\sqrt{x} = \sqrt{7x^2-17x+7}$.

Bài 103. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+x=2+\sqrt{4x^2-x-2}$.

Bài 104. Giải phương trình $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5x^2+9x-10}$.

Bài 105. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x-4}+2\sqrt{2x-3}=\sqrt{x^2+19x-28}$.

Bài 106. Giải phương trình $\sqrt{11-x}+\sqrt{x+2}+2\sqrt{22+9x-x^2}=17$

Bài 107. Giải phương trình $4x^2 + 7x + 1 = 2\sqrt{x+2}$.

2. Đặt nhiều ẩn phụ đưa phương trình về phương trình tích.

Bài 108. Giải phương trình $2x^2 - 6x + 3 + 2(x-2)\sqrt{x(x-2)} = 0$.

Bài 109. Giải phương trình $3x^2 + 2x + 7 = 3(x+1)\sqrt{x^2 + 3}$

Bài 110. Giải phương trình $\frac{6x^2 + 4x + 8}{x+1} = 5\sqrt{2x^2 + 3}$

Bài 111. Giải phương trình $x^2 + 5x + 7 = 7\sqrt{x^3 + 1}$.

Bài 112. Giải phương trình $2x^2 - x + 1 = \sqrt{4x^4 + 1}$.

Bài 113. Giải phương trình $5x^2 - x + 5 = 5\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

Bài 114. Giải phương trình $3x^2 - 4x + 23 = 3\sqrt{x^4 - 8x + 63}$.

Bài 115. Giải phương trình $3\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{4x-3} = 7\sqrt{12x^2 - 17x + 6}$.

Bài 116. Giải phương trình $x^3 + 6\sqrt{x^3 + 4x} = 3x\sqrt{x^3 + 4x} + 8$

Bài 117. Giải phương trình $x^2 + 7x + 3 = 3\sqrt{x^3 + 4x^2 - 5}$.

Bài 118. Giải phương trình $x + 1 + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x^2 + 8x + 4}$.

Bài 119. Giải phương trình $x - 1 + \sqrt{2x+1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + 2}$

Bài 120. Giải phương trình $2\sqrt{3x^2 - 14x + 12} + \sqrt{x} + 3x = 6$.

Bài 121. Giải phương trình $\frac{x^3 + 14}{x + 2} = 2\sqrt{\frac{x^3 - 3x + 4}{x + 1}} + 3$.

Bài 122. Giải phương trình $\sqrt{\frac{3x-2}{2x-1}} = \frac{2(3x-2)\sqrt{2x-1} + 1}{2 + \sqrt{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}}$.

3. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Bài 123. Giải phương trình $x^2 - 5x\sqrt{2x-4} + 8x - 12 = 0$.

Bài 124. Giải phương trình $(x+3)\sqrt{48-x^2-8x} = x+2$.

Bài 125. Giải phương trình $4x^2 + \sqrt{2x+9} = 9$.

Bài 126. Giải phương trình $\sqrt{4x+9} + 3(2x+1) = 2x^2$.

Bài 127. Giải phương trình $x^2 = 3 + (x-1)\sqrt{x^2 - x + 3}$

Bài 128. Giải phương trình $x^2 + x + 6 = (2x+3)\sqrt{2x^2 + 10x + 4}$

4. Đặt ẩn phụ đưa phương trình về hệ phương trình.

a) Đặt ẩn phụ đưa phương trình về hệ phương trình đại số có thể giải được.

Bài 129. Giải phương trình $2\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1} = 1$.

Bài 130. Giải phương trình sau: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} = x-1$.

Bài 131. Giải phương trình sau: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$

Bài 132. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = x+2$.

Bài 133. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{4-3x} = 3$.

Bài 134. Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{7x+1} + \sqrt[3]{x-1} = 2\sqrt[3]{x}$.

Bài 135. Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{4(6x+1)} - \sqrt[3]{3x-7} = \sqrt[3]{3x+1}$.

Bài 136. Giải phương trình $3\sqrt[3]{x+7} - 2\sqrt[3]{x} = \frac{8}{\sqrt[3]{x^2+7x}}$.

Bài 137. Giải phương trình $2\sqrt[3]{(2x-1)^2(6x-5)} = 1 + \sqrt[3]{(2x-1)(6x-5)^2}$.

Bài 138. Giải phương trình $5\sqrt{1-4x} + 2\sqrt{25x+4} + \sqrt{(1-4x)(25x+4)} = 11$.

Bài 139. Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

Bài 140. Giải phương trình $\sqrt[3]{3-2x}(2\sqrt{3x-2}+1) = 3(4x-3)$.

b) Đặt ẩn phụ đưa phương trình về hệ phương trình đối xứng dạng I.

Bài 141. Giải phương trình sau: $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+7} + \sqrt{42-x-x^2} = 11$.

Bài 142. Giải phương trình sau: $\sqrt{11-x} + \sqrt{x+2} + 2\sqrt{22+9x-x^2} = 17$.

Bài 143. Giải phương trình sau: $x + \sqrt{5-x^2} + 3x\sqrt{5-x^2} = 9$.

Bài 144. Giải phương trình $3\sqrt{2-x^2} + \sqrt{9x^2-8} + \sqrt{(2-x^2)(9x^2-8)} = 0$.

Bài 145. Giải phương trình $\sqrt[3]{(14+x)^2} + \sqrt[3]{(14-x)^2} - \sqrt[3]{196-x^2} = 7$.

Bài 146. Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} + 3\sqrt[3]{1-x^2} = 5$.

Bài 147. Giải phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{3}{2}$.

Bài 148. Giải phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{2-x^3}} = 2$.

Bài 149. Giải phương trình $\frac{1+x}{\sqrt{17-4x}} + \frac{1-x}{\sqrt{17+4x}} = \frac{4}{5}$.

Bài 150. Giải phương trình $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2\sqrt{(x+3)(2-x)}} = \frac{7}{12}$.

Bài 151. Giải phương trình $\frac{x+2}{\sqrt{7-6x}} + \frac{1-x}{\sqrt{13+6x}} = \frac{11}{8}$.

Bài 152. Giải phương trình $\frac{x^2-2x+14}{\sqrt{(2x+3)(7-2x)}} + \frac{12+2x-x^2}{\sqrt{14x^2-8x+29}} = 20$

c) Đặt ẩn phụ đưa phương trình về hệ phương trình đối xứng dạng II.

Bài 153. Giải phương trình $5x^2 + 2 = 4\sqrt{\frac{4x-2}{5}}$.

Bài 154. Giải phương trình $(x+1)(x+3) = 5\sqrt{5x+11}$.

Bài 155. Giải phương trình $8x^2 + 8x = \sqrt{\frac{2x+3}{2}}$.

Bài 156. Giải phương trình $\sqrt{4x+9} + 3(2x+1) = 2x^2$.

Bài 157. Giải phương trình $x^2 = 3 + (x-1)\sqrt{x^2 - x + 3}$

Bài 158. Giải phương trình $\frac{2x^2 - x + 1}{\sqrt{6x-5}} = 2$.

Bài 159. Giải phương trình $x^2 + 7x + 16 = (2x-3)\sqrt{2x^2 + 2x - 16}$

5. Đặt nhiều ẩn phụ đưa phương trình về phương trình giải được.

Bài 160. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{5x-1} + \sqrt{5-x}$

Bài 161. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$.

Bài 162. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$.

Bài 163. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2 - x - 8} + \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} = 2$

Bài 164. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 15x - 12 + (x+3)\sqrt{x+3} = 3(x-2)\sqrt{x+3} \cdot \sqrt[3]{3x-4}$

Bài 165. Giải phương trình $x+1 + \sqrt[3]{3x^2 - 5x - 1} = \sqrt[3]{6x^2 - 2} + \sqrt[3]{x^3 - 2x + 2}$

PHƯƠNG PHÁP 5. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Một số kỹ năng đánh giá phương trình vô tỷ

- Kỹ năng lần chặt miền nghiệm để đánh giá.
- Kỹ năng sử dụng hằng đẳng thức đưa phương trình về dạng $A^{2^m} + B^{2^n} + C^{2^k} = 0$, trong đó các số $m, n, k \in \mathbb{N}^*$.
- Kỹ năng sử dụng các bất đẳng thức kinh điển.

1. Làm chặt miền nghiệm để đánh giá phương trình vô tỷ.

Giả sử ta viết phương trình đã cho về dạng $f(x) = k$, khi đó ta có các đánh giá như sau.

- Với $x = x_0$ khi đó $f(x) = f(x_0) = k$, do đó x_0 là nghiệm
- Với $x > x_0$ khi đó $f(x) > f(x_0) = k$, do đó phương trình vô nghiệm
- Với $x < x_0$ khi đó $f(x) < f(x_0) = k$, do đó phương trình vô nghiệm

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 166. Giải phương trình $3 + \sqrt[4]{7x+15} = x + \sqrt{2x}$.

Bài 167. Giải phương trình $\sqrt[4]{7x^2 + 11x + 6} - \sqrt{3x} = x - 6$.

Bài 168. Giải phương trình $(x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} = 3$.

Bài 169. Giải phương trình $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2}$.

Bài 170. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x+7}{x+1}} + 8 = 2x^2 + \sqrt{2x-1}$

Bài 172. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2013x + 2012} + \sqrt{x^2 - 2014x + 2013} = 2\sqrt{x^2 - 2015x + 2014}$.

Bài 173. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$.

Bài 174. Giải phương trình $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt{4x-4} = 0$.

Bài 175. Giải phương trình $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x}$.

2. Kỹ năng sử dụng hằng đẳng thức đưa phương trình về dạng tổng các lũy thừa bậc chẵn.

Bài 176. Giải phương trình $2\sqrt{4x-3} = 5x^2 - 6x + 3$.

Bài 177. Giải phương trình $x^2 + 13x + 28 = 4(x+4)\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$

Bài 178. Giải phương trình $2x^2 + x + 7 = 2x\sqrt{2x-1} + 4\sqrt{x+3}$

Bài 179. Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{3x-2} + 2(2x-1)\sqrt{2-x} = x^2 + 9x - 4$.

Bài 180. Giải phương trình $x^2 + 11x + 18 = 2\sqrt{1+x} + 4(2+x)\sqrt{x+4}$

Bài 181. Giải phương trình $12x^2 + 16x - 1 - 2\sqrt{24x^3 + 12x^2 - 6x} - 4\sqrt{x^2 - x} = 4\sqrt{8x^4 + 9x^2 + x}$.

Bài 182. Giải phương trình $\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

Bài 183. Giải phương trình $\frac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x+x-5}} = \frac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}$.

3. Kỹ năng sử dụng các bất đẳng thức kinh điển.

a) Bất đẳng thức Cauchy.

Dạng tổng quát. Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là các số thực không âm ta có:

- Dạng 1: $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$
- Dạng 2: $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$
- Dạng 3: $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 \cdot x_2 \dots x_n$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ Một số dạng đặc biệt

n	$n = 2$	$n = 3$
Điều kiện	$x, y \geq 0$	$x, y, z \geq 0$
Dạng 1	$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$	$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$
Dạng 2	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$	$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$
Dạng 3	$(x, y > 0)$	$y+z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ $(x, y, z > 0)$
Đẳng thức xảy ra	$x = y$	$x = y = z$

b) Bất đẳng thức Bunhiacopxki

Dạng tổng quát

Cho hai dãy số tùy ý $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; b_3; \dots; b_n$. Khi đó ta có:

- Dạng 1: $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$
- Dạng 2: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq |a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n|$

Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 1 và dạng 2 là: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

- Dạng 3: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 3 là: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$

Một số dạng đặc biệt

$n = 2$	$n = 3$
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$	$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$
$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by $	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq ax + by + cz $
$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by$	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq ax + by + cz$
Đẳng thức xảy ra $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$	Đẳng thức xảy ra $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

c) Một số bất đẳng thức khác.

- $x^2 + y^2 \geq 2xy; 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2; \sqrt{2(x + y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
- $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{3(x + y)^2}{4}$
- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$
- $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

Bài 184. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12x + 40$.

Bài 185. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$

Bài 186. Giải phương trình $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$.

Bài 187. Giải phương trình $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2}$

Bài 188. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} + 4\sqrt{5-x} = 12$.

Bài 189. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = (7x^2-x+4) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Bài 190. Giải phương trình $\sqrt[4]{6x-x^2-8} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} = x^3 + 30$.

Bài 191. Giải phương trình $\sqrt{8-x^2} + \sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} = 5 - \frac{1+x^2}{x}$.